Bruchterme – Handeln wie Experten

Rüede, C

Abstract: Fachliche Expertise beim Umgang mit Bruchtermen und Bruchtermgleichungen zeichnet sich durch ein angemessenes Handeln in jenen Situationen aus, die ungewohnt sind. Um die Schüler und Schülerinnen zu einer solchen Flexibilität hinzuführen, wird hier vorgeschlagen, das, was oftmals unausgesprochen – aber handlungsleitend – ist, sichtbar zu machen. Am Beispiel des Umformens von Bruchtermen und des Lösens von Bruchtermgleichungen wird dargestellt, wie mit den Schülerdokumenten gearbeitet werden kann, um dieses Unausgesprochene der Klasse zugänglich zu machen.

Originally published at:
Rüede, C (2009). Bruchterme – Handeln wie Experten. Praxis der Mathematik, 27(3):41-46.

Bemerkung: Der folgende Text ist eine Vorversion der definitiven Druckvorlage.

Bruchterme – Handeln wie Experten

Fachliche Expertise beim Umgang mit Bruchtermen und Bruchtermgleichungen zeichnet sich durch ein angemessenes Handeln in jenen Situationen aus, die ungewohnt sind. Um die Schüler und Schülerinnen zu einer solchen Flexibilität hinzuführen, wird hier vorgeschlagen, das, was oftmals unausgesprochen – aber handlungsleitend – ist, sichtbar zu machen. Am Beispiel des Umformens von Bruchtermen und des Lösens von Bruchtermgleichungen wird dargestellt, wie mit den Schülerdokumenten gearbeitet werden kann, um dieses Unausgesprochene der Klasse zugänglich zu machen.

Was kommt Ihnen zum Term

$$\frac{a}{4}+\frac{2}{a}-\frac{a}{2}-\frac{1}{2a}$$

in den Sinn? – Müssen Sie dabei ein Gähnen unterdrücken oder werden an langatmige Unterrichtsstunden zum Thema Bruchterme erinnert, dann seien Sie beruhigt, Sie sind in bester Gesellschaft. Wir haben Schülern und Schülerinnen dieselbe Frage gestellt. Sie antworteten mit „Irgendwelche Brüche“ oder „Oh nein, Brüche! Ich hasse Brüche, vor allem in einem Term. Immer dieses ewige Gleichnamig-Machen und Kürzen ...“ oder „Dieser Term wirkt schwer, unsympathisch auf mich, ...“ wie auch „Ich mag ihn schon auf den ersten Blick nicht, denn ich kann Brüche generell nicht ausstehen...“. Lernende – wie auch viele Lehrende – mögen Bruchterme nicht.

Das Thema ist spröde, aber für die Ausbildung an Schweizer Gymnasien insofern relevant, als entsprechende technische Fertigkeiten später vorausgesetzt werden. Darüber lässt sich sicher streiten, für die einzelnen Lehrpersonen ist es aber nicht änderbar. In diesem Artikel soll gezeigt werden, wie selbst ein solch ausgesprochenes „Schwarzbrotthema“ nach dem dialogischen Lernmodell (Ruf/Gallin 1998, Ruf/Keller/Winter 2008) gestaltet werden kann.

Wie geht die Expertin vor?

Sie als Lehrperson haben Intuition und Routine im Umgang mit Bruchtermen und Bruchtermgleichungen. Nach einer Untersuchung von Rüede (2009) setzt sich diese Expertise zusammen aus der Fähigkeit, eine Gleichung lösungsorientiert zu strukturieren und die Folgen von Umformungen abschätzen zu können. Bei Gleichungen, die beinahe algorithmisch gelöst werden können (z.B. Gleichung 1 in *Kasten 3*), verhalten sich Experten und Novizen recht ähnlich. Die Expertise zeigt sich erst bei Gleichungen, die mit Vorteil *nicht* mit einem Standardverfahren gelöst werden (z.B. Gleichungen 2 und 4 in *Kasten 3*). Kompetenz heißt hier, die Gleichung so zu strukturieren, dass lösungsorientierte, möglichst geeignete Umformungen erkennbar werden. Lernende zu einem solch flexiblen Umgang mit Gleichungen hinzuführen ist denn auch das Ziel der hier vorgestellten Unterrichtseinheit. Das Konzept wird am Beispiel von Bruchtermgleichungen illustriert, lässt sich aber problemlos auf quadratische Gleichungen, Wurzelgleichungen etc. übertragen.

Rahmenbedingungen

Die hier vorgestellte Unterrichtskonzeption wurde an Schweizer Gymnasien ausprobiert. Die Lernenden waren im 8. oder 9. Schuljahr. Die Klassen waren neu zusammengestellt, weil in der Regel nach 8 Schuljahren von der Sekundarstufe I zur Sekundarstufe II gewechselt wird. Daher waren die Klassen sehr heterogen. Im Umgang mit Bruchzahlen waren einige Kenntnisse vorhanden: Die Lernenden konnten mit Bruchzahlen rechnen. Zudem besaßen sie eine zweijährige Erfahrung in algebraischem Denken: sie können mit Variablen umgehen, haben lineare Gleichungen gelöst, Terme ausmultipliziert und faktorisiert und haben in exemplarischen Fällen Terme wie $\frac{x}{2}$ und $\frac{x}{3}$ addiert. Aus diesen Gründen wird beim Kapitel Bruchterme von Beginn an das ganze Arsenal möglicher Umformungen bereitgestellt, statt nacheinander zuerst zu kürzen und zu erweitern, dann zu addieren und subtrahieren und schließlich zu multiplizieren und dividieren.

Die in diesem Beitrag angegebene Version der Aufträge wurde im Herbst 2007 einer Klasse mit musischem Profil (9. Schuljahr) vorgelegt. Selbstverständlich sind diese Formulierungen wie auch die Auswahl der Terme und Gleichungen den jeweiligen Klassen anzupassen.

Dialogischer Unterricht

Dialogischer Unterricht beginnt mit einem Auftrag, den die Lernenden selbstständig und schriftlich bearbeiten. Kennzeichnend für den dialogischen Unterricht ist, dass diese Bearbeitungen wieder in den Unterricht einfließen und so den weiteren Verlauf beeinflussen. Dazu erstellt die Lehrperson eine sogenannte Autografensammlung (Ruf/Gallin 1998, Band II, S. 244), die aus interessanten Passagen der Schülerdokumente besteht. Weil die Lernenden den Auftrag selbst bearbeitet haben, setzen sie sich motiviert(er) mit diesen Passagen auseinander und erkennen dabei, was auch noch hätte gesagt werden können und wie die eigenen Antworten von den anderen aufgefasst werden. Insgesamt werden so gelungene und produktive wie auch hinderliche Konzepte einzelner Lernenden der ganzen Klasse zugänglich gemacht.

Besonders bei fachlichen Fragestellungen, zu deren angemessenen Beantwortung mehrere Perspektiven einbezogen werden müssen, ist ein dialogischer Unterricht adäquat. Um etwa zu entscheiden, welche Strategien beim Lösen von Bruchtermgleichungen geeignet sind, müssen verschiedene Sicht- und Betrachtungsweisen einbezogen werden, da auszuhandeln ist, was unter „geeignet“ zu verstehen ist. Die entsprechenden Perspektiven können mit dem Instrument der Autografensammlung sichtbar und so zum Unterrichtsgegenstand gemacht werden.

Stillschweigend Mitgemeintes explizieren

Das Lösen von Gleichungen ist hier nicht (nur) als Anwenden von Regeln konzipiert, denn dazu müssten bei Gleichungen Teile mit gleichungsunabhängiger Bedeutung identifiziert werden können, die dann zur anzuwendenden Regel führen. Nun ist die Bedeutung von Teilen einer Gleichung abhängig von der ganzen Gleichung. Beispielsweise kommt bei

$\frac{x-x^3}{1-x^2} = 1-3x$ und $\frac{2x}{1-x^2} = \frac{-1}{1+x}$

links beides Mal im Nenner der Term $1-x^2$ vor, doch ist dessen Bedeutung im Hinblick auf ein strategisches Vorgehen eine ganz unterschiedliche.

Als Konsequenz werden statt Anwendungsbedingungen für Regeln kontextspezifische Strukturierungen von Gleichungen wichtig. Dafür wird ein Wissen darüber gebraucht, wie eine vorgegebene Gleichung gelesen (d.h. strukturiert) werden kann und soll. Zur Ausbildung eines solchen Wissens wird hier vorgeschlagen, das, was die einzelnen Schüler und Schülerinnen in den Gleichungen sehen und sich bei den Umformungen denken, sichtbar und allen zugänglich zu machen. Indem möglichst viel des oft stillschweigend Mitgemeinten expliziert wird, erhalten die Lernenden Einblick in vielfältige Handlungs- und Betrachtungsweisen, auf die sie in neuen Situationen referieren können.

Bruchterme

Als erste Auseinandersetzung mit den Bruchtermen und Bruchtermgleichungen fordern wir die Lernenden im ersten Auftrag (siehe *Kasten 1*) zu einem mehrschrittigen Verfahren auf: Erst die Terme und ihre Strukturen bewusst wahrzunehmen, dann die Terme umzuformen und zuletzt ihre Umformungen zu erklären. Zum Teil sind die Lernenden überrascht, aufschreiben zu müssen, was sie mathematisch für wichtig erachten. Nichtsdestotrotz wird so sichtbar, was sie mit den Termen in Beziehung bringen – und oftmals eben unausgesprochen bleibt. Ein paar Antworten, die beim ersten Term gegeben werden, seien an dieser Stelle aufgelistet:

Etwa hier Kasten 1 platzieren
Legende: Einstiegsauftrag in die Umformung von Bruchtermen

- die eigentliche Klammer sehen
- 2 Brüche haben einen gemeinsamen Nenner
- kgV ist $2a$
- Brüche gleichnamig machen
- es gibt eine Unbekannte a
- man sollte eine Skizze machen
- Subtraktion von Bruchtermen

Die zweite Teilaufgabe fordert zum Umformen auf. In der Formulierung von *Kasten 1* wurde der Zweck der Umformung offen gelassen, um schauen zu können, welches Umformungsziel die Lernenden sich selbst (implizit) stellen. Das muss aber nicht so sein. Statt „Forme die Terme um“ kann der Auftrag auch „Vereinfache die Terme“ lauten. Mit beiden Formulierungen macht man gute Erfahrungen und bei beiden hat die Lehrperson im Anschluss an den Auftrag die Möglichkeit, Ziele von Umformungen zu diskutieren, beispielsweise in einem Folgeauftrag oder in einem Klassengespräch.

Dieser erste Auftrag ermöglicht den Lernenden gemäß ihren je individuellen Möglichkeiten zu handeln, indem sie ihr Vorwissen ins Spiel bringen. Umgekehrt erhält die Lehrperson beim Durchsehen der Bearbeitungen der Lernenden Auskunft über das individuelle Vorwissen und kann die Fortsetzung des Unterrichts darauf abstimmen. Beispielsweise gaben bei unserer Schulerprobung im Herbst 2007 gut zwei Drittel der Lernenden korrekte Umformungen an, in der Regel solche, die zu einem kürzeren Term führten. So lagen gleich zu Beginn reichlich korrekte Umformungen und typische Rechenfehler vor.

Nutzen, was Lernende produzieren

Wie die Lehrperson den Unterricht nach dem ersten Auftrag fortsetzt, hängt von der Vorgeschichte der Lernenden und ihren Bearbeitungen des Auftrags ab. Entscheidend dabei ist, dass mit den entstandenen Schülerdokumenten gearbeitet wird. Im Folgenden wird exemplarisch gezeigt, wie sich der Unterricht weiter entwickeln kann, wenn er dieser Forderung genügen will. Welche der beschriebenen Unterrichtsfortsetzungen angebracht ist, entscheidet die Lehrperson aufgrund der aktuellen Klasse.

Werden in der Autografensammlung ein paar richtige wie auch falsche Umformungen präsentiert, kann im Klassengespräch oder im Folgeauftrag die Frage nach Rechenregeln gestellt werden. Nebst der Diskussion der Korrektheit von Umformungen kann aber auch jene der Angemessenheit von Umformungen aufgegriffen werden. Beispielsweise formt Franz den letzten Term wie folgt um:

$$xy\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)=xy\left(\frac{x^2}{xy}+\frac{y^2}{xy}\right)=xy\left(\frac{x^2+y^2}{xy}\right)=\frac{xy(x^2+y^2)}{xy}=x^2+y^2.$$

Ivo hingegen rechnet

$$xy\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)=\frac{xyx}{y}+\frac{xyy}{x}=x^2+y^2.$$

Begleitende Fragen können so lauten: Was sind Gemeinsamkeiten und Unterschiede der beiden Lösungswege? Sind beide korrekt? Sehen Franz und Ivo den Term gleich? Was denken sie sich wohl dabei? – Besonders die letzten beiden Fragen zielen auf das Explizieren von stillschweigend Mitgemeintem.

Die Umformungen des ersten Terms führten zu verschiedenen „Resultaten". Elia erhielt $\frac{1-a}{a}$, Anita $\frac{1}{a}-1$, Heino $\frac{2-2a}{2a}$. Fragen wie „Welches ist das einfachste Resultat? Wann ist welche Darstellung angebracht?" sind wertvolle Fragen, um erstens die Aufmerksamkeit der Lernenden auf die Strukturen der Terme zu lenken und zweitens, um zu explizieren, warum man Terme umformt und was Vor- und Nachteile der einzelnen Darstellungen sind.

Etwa hier Abbildung 1 platzieren
Legende: Lösung von Celia

Ein besonders schönes, durchdachtes Beispiel einer falschen Umformung ist der Vorschlag von Celia (siehe *Abb. 1*). In der hier vorgestellten Schulerprobung wurde diese Passage in die Autografensammlung aufgenommen und im Folgeauftrag wurden die Lernenden aufgefordert, zu erklären, ob und warum ein Fehler vorliegt, was sich die Schreibende dabei gedacht hat und was geändert werden kann, damit die Umformungen korrekt sind. Die meisten Schüler und Schülerinnen inklusive Celia erklärten sich den Fehler damit, dass vom multiplikativem Erweitern fälschlicherweise auf additives Erweitern geschlossen wurde und führten Zahlenbeispiele als Gegenbeispiele an. Jemand meinte, dass der Fehler kaum aufgetreten wäre, wenn im Zähler und Nenner verschiedene Buchstaben vorgekommen wären. Andere verwiesen auf die Strategie, beim Rechnen mit Bruchtermen nicht als erstes auszumultiplizieren; auch auf die Ähnlichkeit des Fehlers von Celia zum Umformen von Gleichungen wurde aufmerksam gemacht.

Der Auftrag in *Kasten 1*, die Diskussion verschiedener Lösungswege und Darstellungen oder auch die gerade beschriebene Auseinandersetzung mit Fehlern geben Anlass zur Reflexion darüber, wie man umformt und warum man es so macht. Zusätzlich muss den Lernenden Gelegenheit gegeben werden, Routine im Umformen von Bruchtermen zu bekommen. Dazu dienen Standardaufgaben, wie sie in jedem Lehrbuch zu finden sind. Mit diesen beschäftigten sich die Lernenden vor allem dann, wenn die Lehrperson die Auftragsbearbeitungen der Lernenden gerade eingesammelt hatte und nun zuerst einmal Zeit für die Durchsicht der Schülerdokumente und das Erstellen einer Autografensammlung brauchte. In diesem Wechsel von Auftragsbearbeitung und Beschäftigung mit Routineumformungen wurde etwa sechs Lektionen lang an Bruchtermen gearbeitet. Danach besaßen die Schüler und Schülerinnen genügend Erfahrungen im Umgang mit Bruchtermen, um sich nun den Bruchtermgleichungen zuwenden zu können.

Bruchtermgleichungen

Im Curriculum von Schweizer Gymnasien folgen auf Bruchterme die Bruchtermgleichungen. Fachlich kommt die technische Lästigkeit des Definitionsbereichs hinzu, falls dieser nicht schon früher eingeführt wurde, und – was viel entscheidender ist – es muss nun zielorientiert umgeformt werden, das heißt, im Hinblick darauf, die Gleichung zu lösen.

Schon beim Vereinfachen von Termen ist die Orientierung an dem Ziel, eine möglichst einfache Darstellung des Terms zu finden, gefragt. Doch bei Termumformungen ist oft unklar, was als „möglichst einfache Darstellung“ gilt und daher wird in vielen Lehrbuchaufgaben eine Handlungsanweisung mitgegeben. Beispielsweise heißt es mehrheitlich „Addiere: $\frac{a}{3}+1$“ und nicht „Vereinfache $\frac{a}{3}+1$“. Bei Gleichungen hingegen ist das Ziel klar und so genügt ein kurzes „Löse“. Hier müssen die Lernenden selbst entscheiden, welche Umformungen zum Ziel, zur Lösung der Gleichung führen. Ein strategisches Vorgehen ist unabdingbar. Um dies ins Zentrum zu rücken, wurde das Lösen von Bruchtermgleichungen mit dem Auftrag in *Kasten 2* eröffnet.

Etwa hier Kasten 2 platzieren
Legende: Einstiegsauftrag in das Lösen von Bruchtermgleichungen

Im ersten Schritt knüpfen die Lernenden an ihrem je individuellen Vorwissen über Bruchterme und Gleichungen an und arbeiten selbstständig einen Vorschlag zur Lösung der Bruchtermgleichung $\frac{1}{x}-\frac{1}{3}=\frac{1}{2x}$ aus. In einem zweiten Schritt analysieren sie zwei verschiedene Vorgehen zum Lösen von Bruchtermgleichungen und leiten daraus weitere Lösungswege für die eingangs behandelte Gleichung ab. Dass hier in der zweiten Teilaufgabe eine andere Gleichung als in der ersten gewählt wurde, hat auch praktische und nicht nur inhaltliche Gründe. Der Auftrag wurde vollständig als Hausaufgabe gestellt. Als Folge musste vermieden werden, dass Antworten zur ersten Teilaufgabe im Text zur zweiten Teilaufgabe gegeben werden. Die Lehrperson, welche die Teilaufgaben nacheinander und nicht miteinander stellt, kann selbstverständlich jeweils dieselbe Ausgangsgleichung wählen. Auch sind die in der zweiten Teilaufgabe vorgelegten Strategien dem eigenen Unterricht anzupassen.

Etwa hier Abbildung 2 platzieren
Legende: Ein paar Lösungswege von $\frac{1}{x}-\frac{1}{3}=\frac{1}{2x}$

Es ist erstaunlich, wie viele Lösungsvarianten die an diesem Unterrichtsversuch beteiligte Klasse zur ersten Teilaufgabe produzierte. Zusammen mit den Varianten aus der zweiten Teilaufgabe lag rund ein Dutzend verschiedener Lösungswege vor (siehe *Abb. 2*). Diese unterschiedlichen Vorschläge können wieder in den Unterricht eingebracht werden. In der hier vorgestellten Schulerprobung stellten einige Schüler und Schülerinnen im Unterricht vor, wie sie jeweils vorgegangen waren und welche Gründe sie zu den entsprechenden Umformungen bewogen hatten. Danach wurde in der Klasse diskutiert, welche der vorgestellten Vorgehen in diesem Fall als geeignet zu behandeln sind. Bei umständlicheren Varianten wurde zum Teil danach gefragt, wie die Gleichung abzuändern ist, damit diese umständliche Variante zu einem effizienten Verfahren wird. Zum Beispiel gibt es Fälle, wo das Zusammenfassen einer Seite (*Abb. 2*, z.B. Elia) durchaus erstrebenswert ist, was in einer folgenden Lektion wieder aufgegriffen wurde (Gleichung 2, *Kasten 3*). Weiter kann ein Hin-und-her-Schieben von Bruchtermen wie bei Tom, Damir und Anita (*Abb. 2*) dann sinnvoll sein, wenn auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens ähnliche oder sogar gleiche Bruchterme vorkommen (Gleichung 4, *Kasten 3*).

Anschließend lösen die Lernenden weitere Gleichungen. Weil in der von unserer Lehrperson verwendeten Aufgabensammlung Gleichungen dominierten, bei denen der Dreischritt „gleichnamig machen, mit Hauptnenner multiplizieren, vereinfachen“ am sinnvollsten ist, wurden etliche andersartige Gleichungen eingebracht (vgl. *Kasten 3*). Im folgenden Abschnitt wird dargelegt, wie im Unterricht damit umgegangen wurde.

Etwa hier Kasten 3 platzieren
Legende: Aufgaben

Die Vielfalt der Sicht- und Vorgehensweisen

Gerade untypische Gleichungen wie etwa

$$\frac{x^2}{x^2+1}+\frac{1}{x^2+1}=\frac{10}{x+2}$$

aus *Kasten 3* werden oftmals unterschiedlich gelöst und machen daher die verschiedenen Vorgehens- und Betrachtungsweisen sichtbar. Daher wurden im Unterricht Aufträge wie in *Kasten 3* formuliert. Am Beispiel der obigen Gleichung wird nun beschrieben, wie im dialogischen Unterricht stillschweigend Mitgemeintes mit Hilfe einer Autografensammlung expliziert wird.

Zuerst sieht die Lehrperson die Bearbeitungen der Schüler und Schülerinnen durch. So erkennt sie, was alles thematisiert wurde und welche Konzepte vorliegen – all dies kann offenbar mit der Gleichung in Verbindung gebracht werden. Danach strukturiert sie diesen Zoo der Beiträge und setzt Themenschwerpunkte. Welche Struktur gewählt wird, was berücksichtigt wird und was nicht, ist von der Lehrperson (und selbstverständlich von den Bearbeitungen der Lernenden) abhängig. Abschließend werden die einzelnen thematischen Schwerpunkte mit geeigneten Passagen aus den Schülerdokumenten illustriert. Das Resultat ist eine Autografensammlung, die für alle in der Klasse kopiert, im Unterricht via Hellraumprojektor oder Beamer präsentiert oder einfach mündlich vorgestellt werden kann. In der Schulerprobung im Herbst 2007 wurde die Autografensammlung mündlich dargelegt, wobei folgende, sich ergebende Themenpunkte gemeinsam besprochen wurden:

- *Eine Gleichung kann unterschiedlich strukturiert werden:* Manche Schüler und Schülerinnen haben zuerst im Kopf abgeschätzt, ob bei obiger Gleichung auf das Wegmultiplizieren der Nenner hingearbeitet werden soll oder nicht, und sie haben erst nach getroffener Entscheidung mit dem schriftlichen Lösen begonnen. Diese Strategie kann durchaus auch bei weiteren Gleichungen die Gefahr mindern, ins offene Messer zu laufen.
- *Der Grad des Polynoms, das durch Wegmultiplizieren des Nenners entsteht, kann oft im Voraus abgeschätzt werden:* Einige kamen selbst auf die Idee, überschlagsmässig den Grad des resultierenden Polynoms zu ermitteln, wenn mit dem Hauptnenner multipliziert würde.
- *Eine Gleichung hat mehrere Lesarten:* Wer bei obiger Gleichung zuerst die linke Seite addierte und anschließend den Bruch kürzte, wurde auf $1=\frac{10}{x+2}$ geführt. Im Wesentlichen kamen drei verschiedene Wege vor, diese Zwischengleichung zu lösen: Die einen arbeiteten auf gleiche Nenner hin, die anderen auf gleiche Zähler (inspiriert durch Auftrag von *Kasten 2*). Wieder andere argumentierten inhaltlich: Durch welche Zahl ist 10 zu teilen, damit 1 erhalten wird?

- *Die Bedeutung von „Wegmultiplizieren der Nenner" muss ausgehandelt werden:* Man kann sich durchaus streiten, welche Strategien unter „Wegmultiplizieren der Nenner" subsumiert werden. Auch jene, die als Zwischengleichung $1 = \frac{10}{x+2}$ erhielten und dann mit $(x+2)$ multiplizierten, haben irgendwie den Nenner wegmultipliziert.

Den Auftritt vorbereiten

Haben Schüler und Schülerinnen genügend Erfahrungen im Lösen von Bruchtermgleichungen gesammelt, beginnt die fachliche Bewährung. Sie müssen nun mit der Praxis des Prüfens vertraut werden. Insbesondere müssen sie sich mit den an sie gestellten Anforderungen auseinandersetzen. In der hier vorgestellten Unterrichtseinheit teilte die Lehrperson ihre Ansprüche mit Hilfe von ausgewählten Aufgaben mit, welche von der Klasse schon bearbeitet wurden. Im Anschluss forderte sie auf, eigene Aufgaben zu Bruchtermen zu erfinden, vgl. *Kasten 4*. Gerade weil die Schüler und Schülerinnen des Gymnasiums beim Gleichungslösen – als eine der wenigen Tätigkeiten im Fach Mathematik – nahe an den Expertenstatus kommen können (vgl. Sweller/Cooper (1985), S. 62-63), ist dieser (wohlbekannte) Auftrag an dieser Stelle besonders sinnvoll; abgesehen von weiteren Gründen wie Anwendung und Vertiefung des Gelernten, Ausbildung von Metakompetenzen etc. Denn wer über eine reiche Expertise verfügt, ist insbesondere in der Lage, eine vielfältige, herausfordernde Aufgabensammlung, die auch der Prüfungsvorbereitung dienen kann, herzustellen.

Etwa hier Kasten 4 platzieren
Legende: Einstiegsauftrag in die Prüfungsvorbereitung

In der zweiten Teilaufgabe werden Strategien verlangt, die über das Lösen von Aufgaben hinausgehen. Dies wird im Unterricht vor allem bei jenen Schülern und Schülerinnen deutlich, die zum ersten Mal Gleichungen aufstellen, die von anderen zu lösen sind. Beispielsweise hatten manche Schüler und Schülerinnen Schwierigkeiten, Gleichungen mit ganzzahligen Lösungen zu konstruieren, und andere konnten bloß Gleichungen aufstellen, die entweder trivial oder viel zu kompliziert waren.

Explizieren, was erfolgreich ist

Im Allgemeinen haben es die Schüler und Schülerinnen geschätzt, wenn über das gesprochen wurde, was oft unausgesprochen bleibt. Indem mehrere Sicht- und Vorgehensweisen offengelegt wurden, realisierten sie erstens, welches Konzept dem eigenen Tun unterliegt, zweitens wurden ihnen die erfolgreichen Konzepte kenntlich gemacht und drittens verfielen sie durch die Auseinandersetzung mit der Vielfalt von Handlungsmöglichkeiten nicht in ein kopfloses Abarbeiten von Lösungsschematas. Auch die Lehrpersonen, mit denen zusammengearbeitet wurde, schätzten den Wert des hier vorgestellten Zugangs, denn sie verwenden die beschriebenen Aufträge immer noch – jeweils auf die aktuelle Situation angepasst.

Dank

Ich danke allen beteiligten Lehrpersonen, besonders Martin Andermatt und Mirjam Schlesinger.

Literatur

Ruf, U./ Gallin, P. (1998): Dialogisches Lernen in Sprache und Mathematik. Band I und II. Kallmeyer Verlag, Seelze.

Ruf, U./Keller, S./Winter, F. (2008): Besser lernen im Dialog. Kallmeyer Verlag.
Rüede, C. (2009): Wenn das Unausgesprochene regelnd wirkt – eine theoretische und empirische Arbeit zum Impliziten. Eingereicht.
Sweller, J./Cooper, G.A. (1985): The Use of Worked Examples as a Substitute for Problem Solving in Learning Algebra, in: Cognition and Instruction 2(1), S. 59-89.

Christian Rüede
Universität Zürich
christian.rueede@igb.uzh.ch

Kasten 1, 2, 3 und 4 sind in der Folge angegeben

Kasten 1: Einstiegsauftrag in die Umformung von Bruchtermen

Folgende drei Terme liegen vor:

$$\frac{1}{a}-\frac{a}{2}-\frac{2-a}{2} \qquad \frac{4b(a^2+2a+1)}{ab(a+1)} \qquad xy\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)$$

1. Betrachte jeden Term: Schreibe für jeden Term in wenigen Worten auf, was deines Erachtens bei diesem Term mathematisch wichtig ist.
2. Forme die Terme um. Beschreibe und erkläre deine Umformungen.

Kasten 2: Einstiegsauftrag in das Lösen von Bruchtermgleichungen

1. Löse die Gleichung $\frac{1}{x}-\frac{1}{3}=\frac{1}{2x}$ nach x auf.
2. Nachstehend ist eine andere Gleichung auf zwei verschiedene Arten gelöst:

$$\begin{aligned}
\frac{x-3}{x-2}+\frac{x}{5x-10} &= \frac{3}{5}\\
\frac{x-3}{x-2}+\frac{x}{5(x-2)} &= \frac{3}{5}\\
\frac{5(x-3)}{5(x-2)}+\frac{x}{5(x-2)} &= \frac{3(x-2)}{5(x-2)}\\
5(x-3)+x &= 3(x-2)\\
3x &= 9\\
x &= 3\\
x &= 3 \text{ da Gleichung für } x=3 \text{ definiert}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\frac{x-3}{x-2}+\frac{x}{5x-10} &= \frac{3}{5}\\
\frac{x-3}{x-2}+\frac{x}{5(x-2)} &= \frac{3}{5}\\
\frac{5(x-3)+x}{5(x-2)} &= \frac{3}{5}\\
\frac{6x-15}{5(x-2)} &= \frac{3}{5}\\
\frac{3(6x-15)}{3\cdot 5(x-2)} &= \frac{3(6x-15)}{5(6x-15)}\\
3\cdot 5(x-2) &= 5(6x-15)\\
45 &= 15x\\
x &= 3\\
x &= 3 \text{ da Gleichung für } x=3 \text{ definiert}
\end{aligned}
$$

Löse die eingangs gegebene Gleichung $\frac{1}{x}-\frac{1}{3}=\frac{1}{2x}$ auf diese zwei verschiedenen Arten.

Kasten 3: Aufgaben

Gegeben sind vier Gleichungen:

1. $\frac{x}{x^2+1}+\frac{1}{x^2+1}=\frac{1}{x+2}$
2. $\frac{x^2}{x^2+1}+\frac{1}{x^2+1}=\frac{10}{x+2}$
3. $\left(\frac{18}{x^2}-2\right)\cdot\frac{x}{x-1}+2=\frac{1}{x-1}$
4. $\left(\frac{18}{x^2}-2\right)\cdot\frac{x}{x-1}+\frac{2}{x-2}=\frac{2}{x-2}$

Nicht alle dieser Gleichungen sind am einfachsten durch Wegmultiplizieren der Nenner zu lösen. Bei einigen ist eine andere Strategie angemessener.

a) Löse die vier Gleichungen mit der für dich besten Strategie.
b) Bei einigen Gleichungen ist das Wegmultiplizieren der Nenner ungeeignet. Gib Gründe an, warum du bei diesen Gleichungen anders vorgegangen bist. Findest du weitere Beispiele, bei denen das Wegmultiplizieren der Nenner ungeeignet ist?

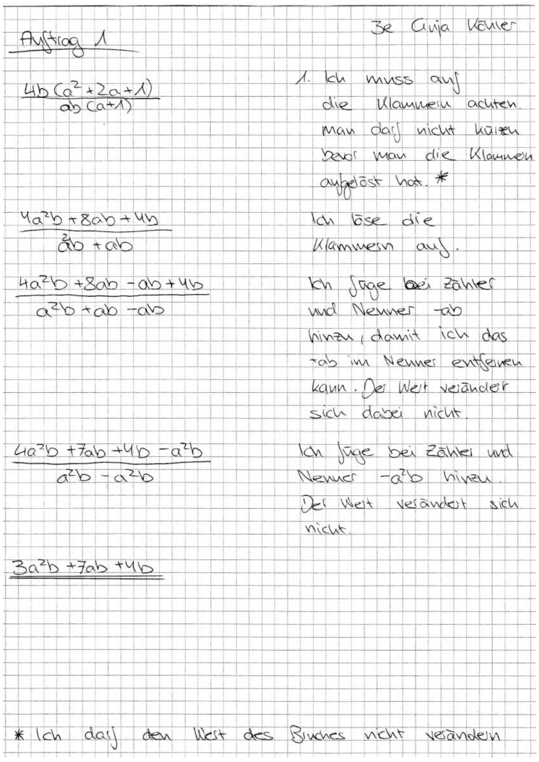
Kasten 4: Einstiegsauftrag in die Prüfungsvorbereitung

1. Erfinde 3 Bruchtermgleichungen und löse sie. Achte darauf,
   a) dass alle Lösungen ganzzahlig sind,
   b) dass bei mindestens einer deiner Bruchtermgleichungen das Wegmultiplizieren der Nenner keine geeignete Strategie ist, das heißt, ein anderes Vorgehen angebracht ist.

2. Beschreibe kurz und in Stichworten, wie du beim Erfinden deiner Bruchtermgleichungen vorgegangen bist.

Abbildungen 1 und 2 sind in der Folge angegeben. Die Originalscans sind in der Beilage

Abb. 1: Lösung von Celia



Auftrag 1

3e Celia Köhler

$\frac{4b(a^2+2a+1)}{ab(a+1)}$

1. Ich muss auf die Klammern achten. Man darf nicht kürzen bevor man die Klammern aufgelöst hat. *

$\frac{4a^2b+8ab+4b}{a^2b+ab}$

Ich löse die Klammern auf.

$\frac{4a^2b+8ab-ab+4b}{a^2b+ab-ab}$

Ich füge bei Zähler und Nenner $-ab$ hinzu, damit ich das $+ab$ im Nenner entfernen kann. Der Wert verändert sich dabei nicht.

$\frac{4a^2b+7ab+4b-a^2b}{a^2b-a^2b}$

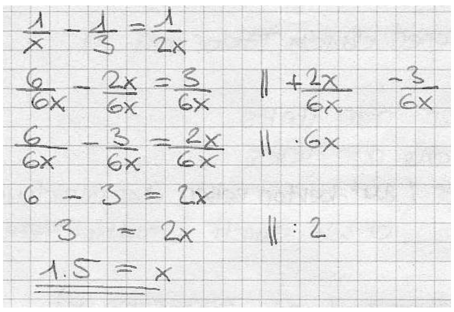
Ich füge bei Zähler und Nenner $-a^2b$ hinzu. Der Wert verändert sich nicht.

$3a^2b+7ab+4b$

* Ich darf den Wert des Bruches nicht verändern

Abb. 2: Ein paar Lösungswege von $\frac{1}{x}-\frac{1}{3}=\frac{1}{2x}$

Anita



$\frac{1}{x}-\frac{1}{3}=\frac{1}{2x}$

$\frac{6}{6x}-\frac{2x}{6x}=\frac{3}{6x} \quad \| +\frac{2x}{6x} \quad -\frac{3}{6x}$

$\frac{6}{6x}-\frac{3}{6x}=\frac{2x}{6x} \quad \| \cdot 6x$

$6-3=2x$

$3=2x \quad \| :2$

$\underline{\underline{1.5=x}}$

Damir

$$\frac{1}{x}-\frac{1}{3}=\frac{1}{2x} \quad \Big| -\frac{1}{x}$$

$$-\frac{1}{3}=\frac{1}{2x}-\frac{1}{x} \quad \Big| \text{gleichnamig machen}$$

$$-\frac{1}{3}=\frac{1}{2x}-\frac{2}{2x}$$

$$-\frac{1}{3}=-\frac{1}{2x} \quad \Big| \cdot -2x$$

$$\frac{2x}{3}=1 \quad \Big| \cdot 3$$

$$2x=3 \quad \Big| :2$$

$$x=\frac{3}{2}$$

Elia

$$1)\ \frac{1}{x}-\frac{1}{3}=\frac{1}{2x}$$

$$\frac{3}{3x}-\frac{x}{3x}=\frac{1}{2x}$$

$$\frac{3-x}{3x}=\frac{1}{2x}$$

$$\frac{2(3-x)}{6x}=\frac{3}{6x} \quad \Big| \cdot 6x$$

$$2(3-x)=3$$

$$6-2x=3 \quad \Big| +2x$$

$$6=3+2x \quad \Big| -3$$

$$3=2x \quad \Big| :2$$

$$\underline{1{,}5=x}$$

Hans

$$\frac{1}{x}-\frac{1}{3}=\frac{1}{2x} \quad \Big| \cdot 6x^2$$

$$6x-2x^2=3x \quad \Big| :x$$

$$6-2x=3 \quad \Big| +2x$$

$$6=3+2x \quad \Big| -3$$

$$3=2x$$

$$\underline{\underline{1.5o.\ \frac{3}{2}=x}}$$

Regula

$$1.\ \frac{1}{x}-\frac{1}{3}=\frac{1}{2x} \quad \Big| -\frac{1}{x}$$

$$-\frac{1}{3}=\underbrace{\frac{1}{2x}-\frac{1}{x}}$$

$$-\frac{1}{3}=\frac{1-2}{2x} \quad \Big| \cdot 3$$

$$-1=\frac{3-6}{2x} \quad \Big| \cdot 2x$$

$-2x=-3$ das Gleiche wie : $2x=3$ $|:2$ = $\underline{\underline{1{,}5=x}}$

Tom

1. $\frac{1}{x} - \frac{1}{3} = \frac{1}{2x} \quad \left| + \frac{1}{3} \quad \right| - \frac{1}{2x}$

$\frac{1}{x} - \frac{1}{2x} = \frac{1}{3} \quad | \cdot 6$

$\frac{6}{6x} - \frac{3}{6x} = \frac{2}{6}$

$\frac{3}{6x} = \frac{2}{6} \quad | : \frac{3}{6}$

$\frac{1}{x} = \frac{2}{3}$

$x = \frac{3}{2}$

3.1 Als erstes habe ich die Terme sotiert dh.: X auf eine seite und die „normalen" Terme auf eine Seite. → Schritt 1.

Dann habe ich den ganzen Term mal 6 gerechnet. → meine Absicht war es die linke Seite der Gleichung gleichnamig zu machen → Schritt 2

Als nächstes habe ich den Term $: \frac{3}{6}$, dass ich X alleinstehend habe und somit definieren kann. → Schritt 4

Und mein letzter Schritt ist klar, $\frac{1}{x} = \frac{2}{3}$ = $X = \frac{3}{2}$